2023（令和5）年度	数学特待生入試 一般入試C日程

数学 解答欄

問題1 ［各10点］

［1］	$a=3$　　$b=2$　　$c=\dfrac{\pi}{12}$
［2］	（1）$\dfrac{1}{2}\log_2 18-\log_2 3=\log_2 18^{\frac{1}{2}}-\log_2 3$ $=\log_2 3\sqrt{2}-\log_2 3$ $=\log_2\dfrac{3\sqrt{2}}{3}$ $=\log_2\sqrt{2}$ $=\dfrac{1}{2}$　　$\underline{\dfrac{1}{2}}$ （2）$\log_9 4-\log_3 6=\dfrac{\log_3 4}{\log_3 9}-\log_3 6$ $=\dfrac{1}{2}\log_3 4-\log_3 6$ $=\log_3 4^{\frac{1}{2}}-\log_3 6$ $=\log_3 2-\log_3 6$ $=\log_3\dfrac{2}{6}$ $=\log_3\dfrac{1}{3}$ $=-1$　　$\underline{-1}$

［３］

$(3+2i)x+(4-i)y=(\sqrt{2}+3i)(\sqrt{2}-3i)$

$3x+2xi+4y-yi=\sqrt{2}^2+3^2$

$(3x+4y)+(2x-y)i=11$

$3x+4y$，$2x-y$は実数なので，

$$\begin{cases} 3x+4y=11 \\ 2x-y=0 \end{cases}$$

これを解いて，

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

［４］

＜　　＞選択した番号を書くこと

＜１＞

女子２人が両端に並ぶ並び方は　${}_3P_2=6$

残りの５人が並ぶ並び方は　$5!=120$

よって

求める並び方の総数は　$6\times120=720$

720

＜２＞

$101011_{(2)}=1\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times1=43$

$43=5\times8+3\times1=53_{(8)}$

43　$53_{(8)}$

問題２ ［各５点］

［１］

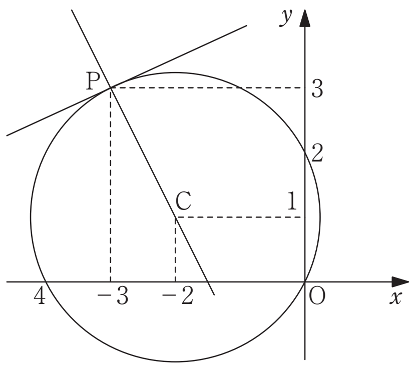
$x^2+y^2+4x-2y=0$

$(x^2+4x+4)-4+(y^2-2y+1)-1=0$

$(x+2)^2+(y-1)^2=5$

$(x+2)^2+(y-1)^2=\sqrt{5}^{\,2}$

よって，中心　C$(-2,\ 1)$，半径 $\sqrt{5}$



中心$(-2,\ 1)$　半径 $\sqrt{2}$

［２］

直線CPの傾きは

$$\frac{1-3}{-2-(-3)}=-2$$

よって，直線CPの方程式は

$$y-1=-2(x+2)$$

$$y=-2x-3$$

$y=-2x-3$

［３］

接線の傾きをmとすると，接線は直線CPと垂直に交わるので，

$$-2\cdot m=-1$$

$$m=\frac{1}{2}$$

よって，接線の方程式は

$$y-3=\frac{1}{2}(x+3)$$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$$

$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{2}$

問題３

［1］4点［2］8点［3］6点［4］7点

［1］

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$$

$x^2 = 3x + 4$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

$x = -1,\ 4$

$\underline{x = -1,\ 4}$

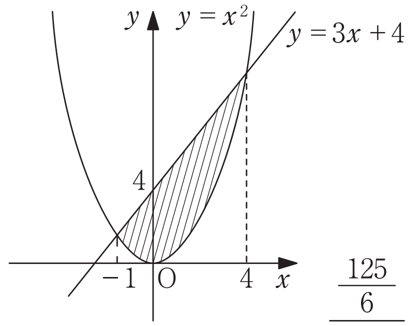
［2］

放物線と直線で囲まれた部分の面積をSとすると

$$S = \int_{-1}^{4} (3x + 4 - x^2)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_{-1}^{4}$$

$$= \frac{125}{6}$$



$\underline{\dfrac{125}{6}}$

［3］

接点$(-1,\ 1)$

$y = x^2$

$y' = 2x$

$x = -1$ のとき $y' = -2$

接線の方程式は

$y - 1 = -2(x + 1)$

$y = -2x - 1$

$\underline{y = -2x - 1}$

［4］

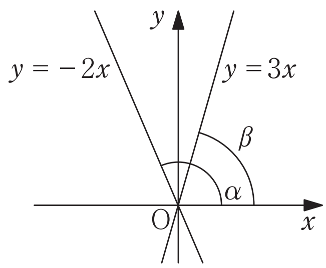
$y = 3x + 4$ と $y = -2x - 1$ を図のように平行移動する。

α，βを図のようにおくとき

$\tan\alpha = -2$

$\tan\beta = 3$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{-2-3}{1 + (-2\cdot 3)} = 1$$



$0 \leqq \alpha - \beta \leqq \pi$ より　$\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4}$

$\underline{\dfrac{\pi}{4}}$

【別解】

直線 $y = 3x + 4$ の方向のベクトル$\vec{a} = (1,\ 3)$

接線 $y = -2x - 1$ の方向のベクトル$\vec{b} = (-1,\ 2)$

$|\vec{a}| = \sqrt{10}$，　$|\vec{b}| = \sqrt{5}$，　$\vec{a}\cdot\vec{b} = -1 + 6 = 5$

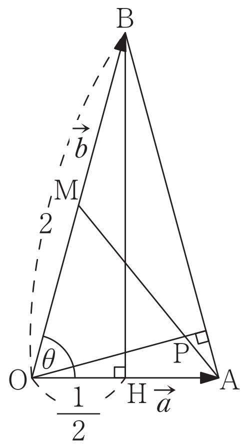
２つの方向ベクトルのなす角をθとすると

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$

$\underline{\dfrac{\pi}{4}}$

問題4　［1］6点［2］4点［3］10点

［1］	Bから，辺OAに下した垂線の足をHとする。 △BOAは二等辺三角形なので $\mathrm{OH}=\dfrac{1}{2}$ $\angle\mathrm{BOA}=\theta$ とおくと， $\cos\theta=\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{4}$ $\lvert\vec{a}\rvert=1,\quad \lvert\vec{b}\rvert=2$ より $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta=1\cdot2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$  $\underline{\dfrac{1}{2}}$ 【別解】 $\lvert\vec{a}\rvert=1,\quad \lvert\vec{b}\rvert=2,\quad \lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert=2$ より $\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert^2=4$ $\lvert\vec{a}\rvert^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\lvert\vec{b}\rvert^2=4$ $1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=4$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ $\underline{\dfrac{1}{2}}$
［2］	PはM$\left(\dfrac{\vec{b}}{2}\right)$，A$(\vec{a})$を結ぶ線分を $t:(1-t)$ に内分するので， $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a}+(1-t)\dfrac{\vec{b}}{2}=t\vec{a}+\dfrac{1-t}{2}\vec{b}$ $\underline{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a}+\dfrac{1-t}{2}\vec{b}}$
［3］	$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$なので， $(\vec{b}-\vec{a})\cdot\left(t\vec{a}+\dfrac{1-t}{2}\vec{b}\right)=0$ $-t\lvert\vec{a}\rvert^2+\left(t-\dfrac{1-t}{2}\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1-t}{2}\lvert\vec{b}\rvert^2=0$ $-t+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}t-\dfrac{1}{2}\right)+2(1-t)=0$ $-4t+3t-1+8-8t=0$ $t=\dfrac{7}{9}$ よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{7}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{9}\vec{b}$ $\underline{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{7}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{9}\vec{b}}$

評　点		